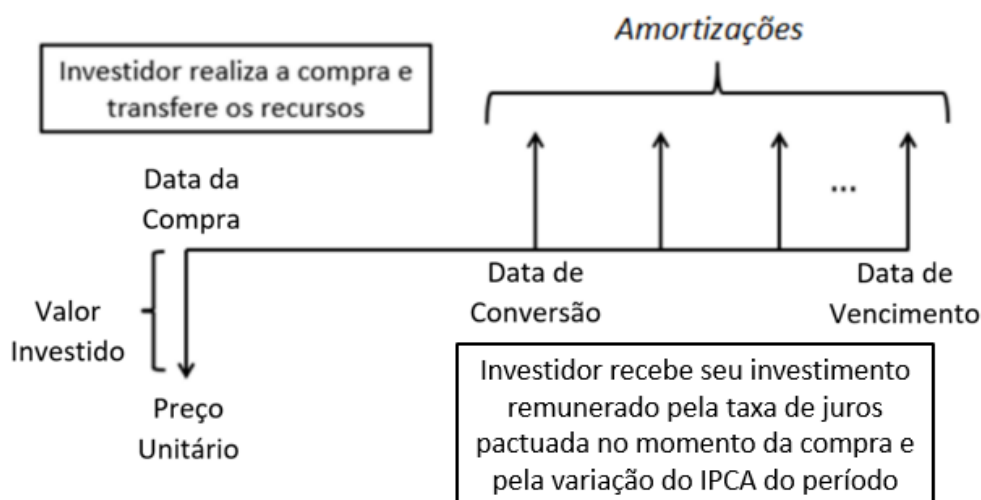


Cálculo da Rentabilidade dos Títulos Públicos Ofertados no Tesouro Direto

Tesouro Educa⁺ – NTN-B1

O Tesouro Educa⁺ (NTN-B1)¹ é um título escritural, nominativo, negociável e pós-fixado cuja rentabilidade é composta por dois fatores: uma taxa anual pactuada no momento da compra; e a variação do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA²). Além disso, possui a particularidade de não pagar seu principal em uma única parcela na data de vencimento. Nesse caso, o principal é pago em 60 (sessenta) parcelas (amortizações) mensais que se iniciam na “data de conversão” e terminam de ser pagas (60 meses depois) na data de vencimento. A rentabilidade é dada pela taxa anual de juros mais a variação do indexador até o vencimento. A Figura 1 abaixo ilustra o fluxo de pagamentos do Tesouro Educa⁺ (NTN-B1):

Figura 1 – Diagrama do fluxo do Tesouro Educa⁺



Ao longo de todo o período, isto é, desde a data da compra do título até a data de seu vencimento, o principal ainda não amortizado continuará sendo corrigido tanto pela taxa pactuada no momento da aquisição quanto pela variação do IPCA no período. A correção pela inflação é feita por meio da atualização do Valor Nominal Integral (VNI), fixado em R\$ 1.000,00 em 15/07/2000 (data-base) e, desde então, atualizado pelo IPCA. Ou seja, a aquisição de um ativo hipotético pelo valor do VNI e a sua posterior venda em uma data futura pelo valor do VNI (atualizado) garantiria ao investidor a rentabilidade equivalente à variação da inflação. Da mesma forma, caso os títulos do Tesouro Educa⁺ (NTN-B1) tivessem como rentabilidade exclusivamente a inflação, poderiam ser comprados ao preço do VNI.³ Contudo, além da inflação, o Tesouro Educa⁺ conta ainda com a parcela de juros pactuada no momento da compra⁴. Sendo assim, os títulos poderão ser comprados a um valor inferior ao do VNI⁵

1 O Tesouro Educa⁺ também é um título NTN-B1, mas com datas de conversão e número de amortizações diferentes das utilizadas para o Tesouro Renda⁺.

2 Índice de inflação calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE.

3 Isso vale até a data de conversão. A partir dessa data teríamos que levar em conta o VNA (Valor Nominal Atualizado) que difere do VNI por subtrair deste os valores amortizados.

4 Conquanto se espere que a taxa seja positiva, teoricamente nada impede que ela venha a ser nula ou mesmo negativa a depender das condições de mercado.

5 Consideramos aqui o cenário de taxas positivas, por serem as mais prováveis. Em caso de taxa negativa, o título poderia ser comprado por um valor superior ao VNI.

o que garante um rendimento adicional à inflação. Assim, para um dado título Educa+, quanto menor for o preço de compra em relação ao VNI, maior é a taxa anual de juros que esse título renderá para além da inflação (sendo o contrário também verdade). Resta esclarecer como chegar ao valor do título uma vez conhecida a taxa anual de juros pactuada.

O exemplo a seguir ilustra a compra de um título Tesouro Educa+, descrevendo suas principais características e metodologia de cálculo do preço.

Tabela 1 – Dados para o exemplo de precificação de um título Tesouro Educa+

Título: Tesouro Educa ⁺ 2030 (NTN-B)	Data de conversão: 15/01/2030
Data da compra: 21/06/2023 (liquidação ⁶ em 22/06/2023)	Data de vencimento: 15/12/2034
Quantidade adquirida: 1,0 título	Taxa Pactuada: 5,36% a.a.
VNI na data-base: R\$ 1.000,00	Preço do título na data da compra: R\$ 2.587,63 (a saber)
VNI até junho/2023: R\$ 4.128,079671	IPCA projetado para junho/2023: 0,02%

Metodologia de Cálculo do Preço

O preço (Preço Unitário - PU) do Tesouro Educa⁺ (NTN-B1), assim como de qualquer outro título no Tesouro Direto, é dado pelo total dos fluxos futuros trazidos a valor presente. Trata-se, portanto, do valor que se espera receber do título descontado no tempo pela rentabilidade contratada. Contudo, no caso do Tesouro Educa+, sabemos apenas que receberemos o VNI devidamente atualizado, mas não sabemos antecipadamente que valor será esse. Assim, o desconto temporal para o cálculo do preço (PU) deve ser realizado sobre um valor hipotético de VNI. Usemos, como exemplo e por conveniência de cálculo, o valor 100. Ao descontarmos temporalmente esse valor pela taxa anual de juros pactuada no momento da compra (na Tabela 1 acima, “Taxa Pactuada”) chegaremos a um valor que guardará alguma relação de proporcionalidade com o valor inicial (100) e que pode ser facilmente expresso em termos de percentual. A esse percentual chamaremos Cotação.

Assim, o preço (PU) do Tesouro Educ⁺ (NTN-B1), em analogia com todos os outros títulos pós-fixados negociados no Tesouro Direto, é dado pela equação:

$$Preço = VNI^{proj} * Cotação \%$$

O VNI correspondente ao dia da liquidação da compra deve ser o projetado, pois o indexador ao qual o papel está vinculado somente é conhecido *ex post*, sendo necessário, desta forma, fazer sua projeção ou utilizar uma calculada pelo mercado. Mas antes de projetá-lo, devemos apurar sua variação até o mês anterior ao da liquidação da operação, que, por sua vez, já é conhecido:

$$VNI = R\$ 1.000,00 * \text{fator de variação do IPCA entre 15/07/2000 e o dia 15 do mês anterior}$$

Para chegarmos ao fator de variação do IPCA entre o dia 15/07/2000 e o dia 15/06/2023 (IPCA de maio/2023), no caso do exemplo, basta dividir os respectivos números-índices da série disponibilizada pelo IBGE⁷.

6 A liquidação de uma operação é a última etapa do processo de compra e venda de ativos ou valores mobiliários, na qual se dá a transferência da propriedade do ativo e o pagamento/recebimento do montante financeiro envolvido. O rendimento da aplicação inicia-se efetivamente na data de liquidação da compra.

7 <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=series-historicas>

Núm. Ind. IPCA 15/jun/2000 = 1.614,62

Núm. Ind. IPCA 15/set/2022 = 6.665,28

$$fator = \frac{6.665,28}{1.614,62}$$

$$fator = 4,128079671$$

Retomando o cálculo do VNI:

*VNI = R\$ 1.000,00 * fator de variação do IPCA entre 15/07/2000 e o dia 15 do mês anterior*

$$VNI = R\$ 1.000,00 * 4,128079671997$$

$$VNI = R\$ 4.128,079671997$$

Como a regra de truncamento⁸ do VNI é na sexta casa, tem-se:

$$VNI = R\$ 4.128,079671$$

Voltando à projeção, à época, não se sabia qual seria o IPCA de junho/2023, mas o mercado possuía uma projeção (0,02%), que foi utilizada na precificação:

$$VNI^{proj} = VNI * (1 + IPCA_{projetado})^x$$

Cabe ressaltar que, por meio do site do Tesouro Direto, é possível obter a série histórica do VNI do Tesouro Educa+ (NTN-B1):⁹

O expoente da equação “x” transforma a projeção do IPCA de mensal para diário, aplicando ao cálculo a quantidade correta de dias transcorridos. Matematicamente ele nada mais é que a razão entre o número de dias corridos entre a data de liquidação e o último dia 15, e o número de dias corridos entre o próximo dia 15 e o último dia 15.¹⁰ Ou seja:

$$x = \frac{n^{\circ} \text{ de dias corridos entre a data de liquidação e dia 15 do mês atual}}{n^{\circ} \text{ de dias corridos entre o dia 15 do mês seguinte e o dia 15 do mês atual}}$$

No caso em questão, temos que:

$$x = \frac{n^{\circ} \text{ de dias corridos entre 22jun2023 e 15jun2023}}{n^{\circ} \text{ de dias corridos entre o dia 15jun2023 e 15jul2023}}$$

$$x = \frac{7}{30}$$

⁸ Truncar significa interromper um número a partir de certo ponto, sem arredondamento. O Excel possui uma função, chamada TRUNCAR, onde é possível truncar a parte inteira ou a parte fracionária de um número.

⁹ <https://www.tesourotransparente.gov.br/publicacoes/valor-nominal-de-ntn-b/28715>

¹⁰ A razão x é calculada com 14 (quatorze) casas decimais sem arredondamento.

Retornando à equação:

$$VNI^{proj} = VNI * (1 + IPCA_{projetado})^x$$

$$VNI^{proj} = R\$ 4.128,079671 * (1 + 0,02\%)^{\frac{7}{30}}$$

$$VNI^{proj} = R\$ 4.128,272299$$

O cálculo da cotação, como já mencionado, nada mais é que o fluxo hipotético de 100 unidades trazido a valor presente. Para realizar este cálculo, resta-nos saber como esse fluxo se distribui no tempo. O fluxo, após o dispêndio inicial da compra do título, resume-se ao principal que é pago em 60 (sessenta) parcelas mensais (amortizações) a partir da data de conversão. Cada uma das 60 (sessenta) parcelas pretende retornar ao investidor uma parte igual do Principal hipotético (100). Ou seja, cada parcela ou Taxa de amortização (T_a) é dada pela seguinte fórmula:

$$T_a = \frac{100}{60}$$

Uma vez que a razão expressa acima resulta em uma dízima periódica¹¹, faz-se necessário o uso de um critério de arredondamento. Truncaremos o resultado na 6ª (sexta) casa decimal. Em números: $T_a = 1,666666$. No entanto, a aplicação do truncamento fará com que a soma das 60 (sessenta) parcelas não atinja a unidade ($60 \times 1,666666 = 99,99996$). Para corrigir esse problema, a última parcela do fluxo, qual seja, a Taxa de amortização final (T_{af}), assume a seguinte forma:

$$T_{af} = 100 - (59 \times T_a) = 100 - (59 \times 1,666666) = 1,666706$$

Assim, como pretendíamos, $[(59 \times 1,666666) + 1,666706] = 100$.

Agora lembremos que para trazer um fluxo futuro a valor presente, basta que o dividamos por 1 (um) mais sua taxa de retorno ao longo do período. Uma vez que o período entre a data de hoje e o fluxo futuro deve ser medido em número de dias úteis, e a Taxa Interna de Retorno (TIR) é expressa em termos anuais, precisamos padronizar essas unidades de medida. Como exemplo, temos que para trazermos a primeira amortização (1,666666) do nosso título Tesouro Educa+ 2030 que será pago no dia 15/01/2030 a valor presente, isto é, até a data de liquidação da compra (22/06/23), a conta¹² é a seguinte:

$$Valor\ Presente = \left[\frac{1,666666}{(1 + TIR)^{\frac{DU}{252}}} \right] = \left[\frac{1,666666}{(1 + 0,0536)^{\frac{1648}{252}}} \right]$$

Este mesmo raciocínio deve ser aplicado a todo o fluxo de pagamentos futuros (amortizações) para obtermos a cotação do papel, que refletirá o ágio ou o deságio¹³ do título, conforme cálculo descrito abaixo:

¹¹ Números decimais que apresentam algoritmos que se repetem infinitamente.

¹² São usados nesse cálculo 10 (dez) casas decimais com arredondamento.

¹³ O papel poderá apresentar tanto ágio como deságio uma vez que há a possibilidade teórica do título ser negociado a uma taxa de juros negativa.

$$Cotação = \left[\frac{1,666666}{(1 + TIR)^{\frac{DU_1}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + TIR)^{\frac{DU_2}{252}}} \right] + \dots$$

$$+ \left[\frac{1,666666}{(1 + TIR)^{\frac{DU_{59}}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666706}{(1 + TIR)^{\frac{DU_{60}}{252}}} \right]$$

Como a TIR da equação é a taxa pactuada no momento da compra do papel, no exemplo em questão, 5,36% ao ano, então, temos que:

$$Cotação = \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{DU_1}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{DU_2}{252}}} \right] + \dots + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{DU_n}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666706}{(1 + 5,36\%)^{\frac{DU_{60}}{252}}} \right]$$

As variáveis “DU_n”¹⁴ se referem aos dias úteis entre a data de liquidação e a data do pagamento da n-ésima amortização. Ex.: DU₁ são os dias úteis entre a liquidação da compra e o pagamento da primeira amortização em 15/01/2030 (data de conversão do título de nosso exemplo); DU₂ são os dias úteis entre a liquidação da compra e o pagamento da segunda amortização em 15/02/2030 e assim sucessivamente, até o seu vencimento em 15/12/2034. Para melhor ilustrar, em anexo disponibilizamos uma tabela com todos os valores, mas em resumo, tem-se que as parcelas apresentam os seguintes valores:

$$Cotação = \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{1648}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{1671}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{1689}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{1710}{252}}} \right]$$

$$+ \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{1730}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{1753}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{1772}{252}}} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{2825}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{2845}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666666}{(1 + 5,36\%)^{\frac{2866}{252}}} \right] + \left[\frac{1,666706}{(1 + 5,36\%)^{\frac{2887}{252}}} \right]$$

$$Cotação = 62,680921$$

$$Cotação\% = 62,680921\%$$

Cabe ressaltar que as cotações dos títulos negociados no Tesouro Direto são truncadas na quarta casa decimal. Desta forma:

$$Cotação\% = 62,6809\%$$

Retomando a equação original do preço do papel, tem-se:



$$\text{Preço} = \text{VNI}^{\text{proj}} * \text{Cotação \%}$$

$$\text{Preço} = \text{R\$ } 4.128,272299 * 62,6809\%$$

$$\text{Preço} = \text{R\$ } 2.587,638231$$

Por fim, como os Preços dos títulos negociados no Tesouro Direto são truncados na segunda casa decimal, então:

$$\text{Preço} = \text{R\$ } 2.587,63$$

Anexo

Evento	Data	Dias Úteis	Dias Úteis / 252	Fluxo
Liquidação	22/09/2022	0	0	
1ª Amortização	15/01/2030	1.648	6,53968253968254	1,666666
2ª Amortização	15/02/2030	1.671	6,63095238095238	1,666666
3ª Amortização	15/03/2030	1.689	6,70238095238095	1,666666
4ª Amortização	15/04/2030	1.710	6,78571428571429	1,666666
5ª Amortização	15/05/2030	1.730	6,86507936507936	1,666666
6ª Amortização	15/06/2030	1.753	6,95634920634921	1,666666
7ª Amortização	15/07/2030	1.772	7,03174603174603	1,666666
8ª Amortização	15/08/2030	1.795	7,12301587301587	1,666666
9ª Amortização	15/09/2030	1.817	7,21031746031746	1,666666
10ª Amortização	15/10/2030	1.838	7,29365079365079	1,666666
11ª Amortização	15/11/2030	1.861	7,38492063492064	1,666666
12ª Amortização	15/12/2030	1.881	7,46428571428571	1,666666
13ª Amortização	15/01/2031	1.901	7,54365079365079	1,666666
14ª Amortização	15/02/2031	1.924	7,63492063492064	1,666666
15ª Amortização	15/03/2031	1.942	7,70634920634921	1,666666
16ª Amortização	15/04/2031	1.962	7,78571428571429	1,666666
17ª Amortização	15/05/2031	1.982	7,86507936507936	1,666666
18ª Amortização	15/06/2031	2.003	7,94841269841270	1,666666
19ª Amortização	15/07/2031	2.024	8,03174603174603	1,666666
20ª Amortização	15/08/2031	2.047	8,12301587301587	1,666666
21ª Amortização	15/09/2031	2.068	8,20634920634921	1,666666
22ª Amortização	15/10/2031	2.090	8,29365079365079	1,666666
23ª Amortização	15/11/2031	2.113	8,38492063492063	1,666666
24ª Amortização	15/12/2031	2.133	8,46428571428571	1,666666
25ª Amortização	15/01/2032	2.154	8,54761904761905	1,666666
26ª Amortização	15/02/2032	2.174	8,62698412698413	1,666666
27ª Amortização	15/03/2032	2.194	8,70634920634921	1,666666
28ª Amortização	15/04/2032	2.216	8,79365079365079	1,666666
29ª Amortização	15/05/2032	2.237	8,87698412698413	1,666666
30ª Amortização	15/06/2032	2.257	8,95634920634921	1,666666
31ª Amortização	15/07/2032	2.279	9,04365079365079	1,666666
32ª Amortização	15/08/2032	2.301	9,13095238095238	1,666666
33ª Amortização	15/09/2032	2.322	9,21428571428571	1,666666
34ª Amortização	15/10/2032	2.343	9,29761904761905	1,666666
35ª Amortização	15/11/2032	2.363	9,37698412698413	1,666666
36ª Amortização	15/12/2032	2.384	9,46031746031746	1,666666
37ª Amortização	15/01/2033	2.407	9,55158730158730	1,666666
38ª Amortização	15/02/2033	2.428	9,63492063492063	1,666666
39ª Amortização	15/03/2033	2.446	9,70634920634921	1,666666
40ª Amortização	15/04/2033	2.469	9,79761904761905	1,666666
41ª Amortização	15/05/2033	2.488	9,87301587301587	1,666666
42ª Amortização	15/06/2033	2.510	9,96031746031746	1,666666
43ª Amortização	15/07/2033	2.531	10,04365079365080	1,666666
44ª Amortização	15/08/2033	2.552	10,12698412698410	1,666666
45ª Amortização	15/09/2033	2.574	10,21428571428570	1,666666

46ª Amortização	15/10/2033	2.595	10,29761904761900	1,666666
47ª Amortização	15/11/2033	2.615	10,37698412698410	1,666666
48ª Amortização	15/12/2033	2.636	10,46031746031750	1,666666
49ª Amortização	15/01/2034	2.658	10,54761904761900	1,666666
50ª Amortização	15/02/2034	2.680	10,63492063492060	1,666666
51ª Amortização	15/03/2034	2.698	10,70634920634920	1,666666
52ª Amortização	15/04/2034	2.720	10,79365079365080	1,666666
53ª Amortização	15/05/2034	2.738	10,86507936507940	1,666666
54ª Amortização	15/06/2034	2.760	10,95238095238100	1,666666
55ª Amortização	15/07/2034	2.782	11,03968253968250	1,666666
56ª Amortização	15/08/2034	2.803	11,12301587301590	1,666666
57ª Amortização	15/09/2034	2.825	11,21031746031750	1,666666
58ª Amortização	15/10/2034	2.845	11,28968253968250	1,666666
59ª Amortização	15/11/2034	2.866	11,37301587301590	1,666666
60ª Amortização	15/12/2034	2.887	11,45634920634920	1,666706